# 一、图的基本概念

## 图的定义

- 有向图
- 无向图

## 节点和边的关系

### 无向图

G = <V, E, Ψ >，e, e1, e2 ∈ E 且v1, v2 ∈V

- 如果Ψ(e) ={v1,v2}，则称e 与 v1 （或v2）互相**关联**（incident）
- e 连接 v1和 v2，v1和 v2 既是 e 的起点，也是 e 的终点，也称 **v1 和 v2 邻接**
- 如果两条不同边 e1 和 e2 与同一个结点关联，则称 **e1 和 e2 邻接**

### 有向图

有向图 G = <V, E, Ψ >，e, e1, e2 ∈ E且v1, v2 ∈V

- 如果Ψ(e) =<v1,v2>，则称e 与 v1 （或v2）互相**关联**（incident）
- e 连接 v1和 v2，v1是 e 的起点，v2是 e 的终点，称 **v1 和 v2 邻接**

## 自圈，平行边,简单图

设图 G = <V, E, Ψ >， e1 和 e2 是 G 的两条不同边。

- 如果与e1关联的两个结点相同，则称 e1为**自圈(**self loop)
- 如果 Ψ(e1) = Ψ(e2)，则称 e1 与 e2 **平行**
- 如果图 G 没有自圈，也没有平行边，则称G为**简单图**

## 节点的度

**定义1.5** 设 $v$ 是图 $G$ 的结点。
(1) 如果 $G$ 是无向图，$G$中与 $v$ 关联的边数目之和称为 $v$ 的度，记为 $d_G(v)$ 。
(2) 如果 $G$ 是有向图，
$G$中以 $v$ 为起点的边的数目称为 $v$ 的出度，记为$d_G^+(v)$;
$G$中以 $v$ 为终点的边的数目称为$v$的入度，记为$d_G^-(v)$ ;
$v$ 的出度与入度之和称为 $v$ 的度，记为 $d_G(v)$.

- 注意：
  - 在计算无向图中结点的度时，一个自圈要计算两次
  - 每增加一条边，都使图中所有结点的度数之和增加 2

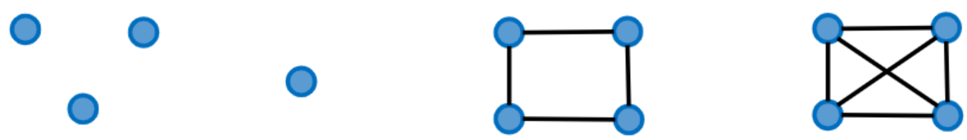
- 度为奇数的节点成为**奇节点**
- 度为偶数的节点成为**偶节点**
- 度为0的节点成为**独/孤立点**
- 度为1的节点成为**端点**
- **任何图中都有偶数个奇节点**（定理1.3）

## 握手定理

- 设无向图 G = <V, E, Ψ >有m条边，则$\sum_{v\in V} d_{G(v)} = 2m$
- 设有向图 G = <V, E, Ψ > 有 m 条边，则$\sum_{v\in V} d^+_{G(v)} = \sum_{v\in V} d^-_{G(v)} = m$且 $\sum_{v\in V} d_{G(v)} = 2m$ .

## 几类特殊的图

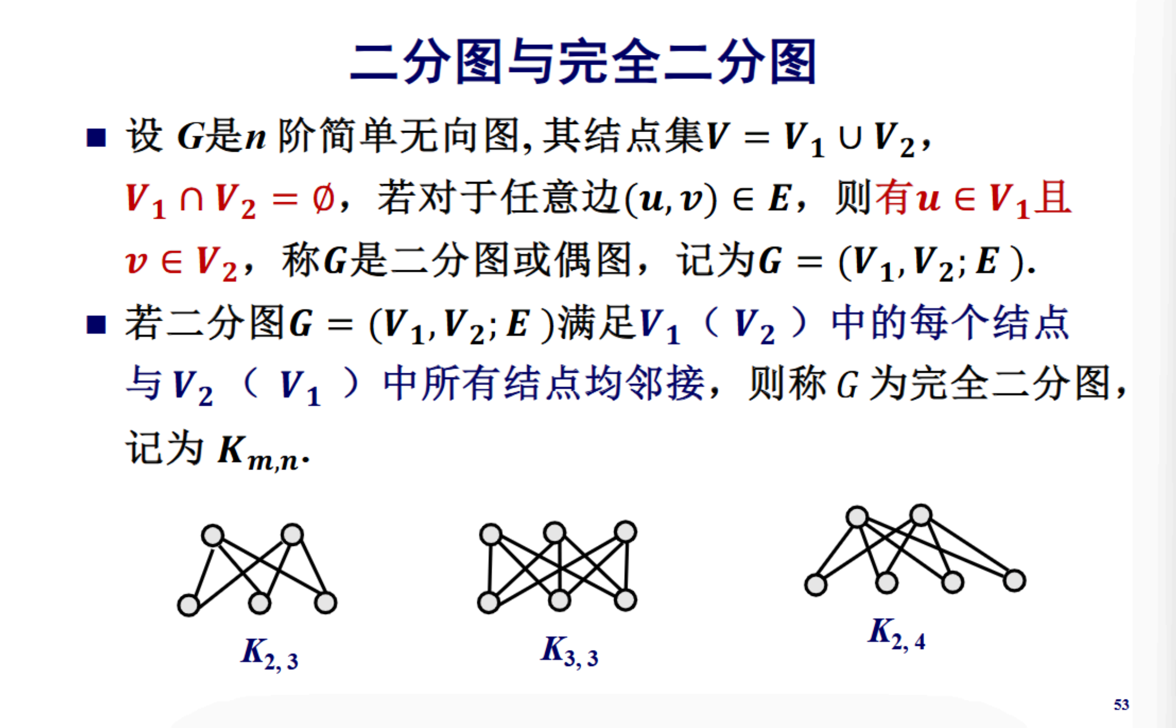
- 结点都是孤立点的图称为**零图**
- 一阶零图称为**平凡图**
- 所有结点的度均为自然数 d 的无向图称为 **d 度正则图**



$G_1$ 3阶零图 $G_2$ 平凡图 $G_3$ 4阶2度正则图 $G_4$ 4阶3度正则图

- 设 n ∈ I+， 如果 n 阶简单无向图 G 是 n-1 度正则图，则称 G 为 **完全无向图**，记为$K_n$
- 设 n ∈I+， 每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶简单
  有向图称为 **完全有向图**
- 设 G是n阶简单无向图 ( n∈I+)，若n 个结点恰形成一个圈，则称 G 为**圈图**
- 设 G是n阶简单无向图 ( n∈I+)，若n-1 个结点恰形成一个圈图，且第n个结点与圈图上的每个结点邻接，则称G 为**轮图**

- 二分图

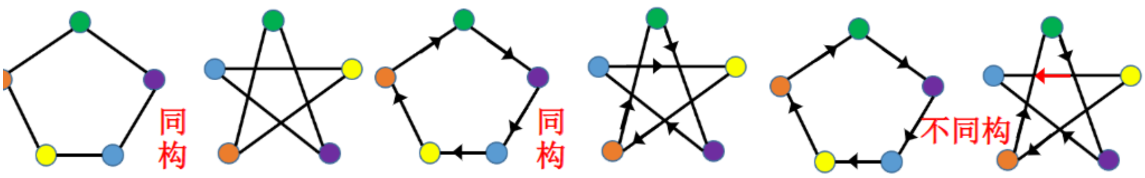



## 同构

**定义1.9** 设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$。如果存在 双射 $f: V \to V'$ 和 双射 $g: E \to E'$，使得对于任意 $e \in E$ 及 $v_1, v_2 \in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ <f(v_1), f(v_2)>, \text{若 } \Psi(e) = <v_1, v_2> \end{cases}$$

则称 $G$ 与$G'$ 同构，记做 $G \cong G'$，并称 $f$ 和 $g$ 为 $G$ 与 $G'$之间的同构映射，简称同构。



# 二、子图

## 子图 真子图 生成子图

**定义2.1** 设 $G=<V,E,\Psi>$, $G'=<V',E',\Psi'>$为图。

(1) 如果 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，$\Psi'\subseteq\Psi$，则称$G'$是$G$的子图，记为 $G'\subseteq G$，并称 $G$ 是 $G'$的母图。

(2) 如果 $V'\subseteq V$，$E'\subset E$，$\Psi'\subset\Psi$，则称$G'$是$G$的真子图，记为 $G'\subset G$。

(3) 如果 $V'=V$，$E'\subseteq E$，$\Psi'\subseteq\Psi$，则称$G'$是$G$的生成子图(Spanning Subgraph)。

## 导出子图

### 节点集导出子图

设图 G =<V, E, Ψ >，$V'$是V的子集 且 $V'$ ≠ 空集。
(1) 以 $V'$为结点集合，以所有起点和终点均在$V'$ 中的边的全体为边集合的 G 的子图，称为**由$V'$导出的G的子图，记为 G[$V'$]。**
(2) 若 $V'$真包含于V，**导出子图 G[V−$V'$] 记为 G −$V'$**

直观理解

- G[$V'$]：以 $V'$ 为结点集合的**最大子图**
- G – V'：从 G 中去掉 V' 中的**结点**以及**与这些结点关联的所有边**而得到的G的子图

### 由边集导出的子图

- 以 $E'$ 为边集合的 G 的**子图**称为由 E'导出的子图，记为 G[$E'$]

## 性质

- G 的子图是 G 的一部分,也可能就是G
- G 的真子图的边比 G 的边少
- G 的生成子图与 G 有**相同的结点**
- G 的导出子图 G[$V'$]是 G的以$V'$为结点集合的**最大子图**

# 三、图的运算

## 可运算

设 G = <$V$, $E$, $\Psi$ >， $G'$ = <$V'$, $E'$, $\Psi'$ >同为无向图或同为有向图。

- 如果对于任意 e ∈ $E\cap E'$，均有 $\Psi$(e) = $\Psi'$(e)，则称 $G$ 和 $G'$是**可运算**的,**也就是说公共边所关联的点相同**

- 如果$V\cap V' = E\cap E'$=空集，则称 $G$ 和 $G'$是**不相交的,**也就是说没**有公共点**
- 如果 $E\cap E'$ = 空集，则称 $G$ 和 $G'$是**边不相交**的

## 交,并,环和

设图G1 = <V1, E1, Ψ1>和G2 = <V2, E2, Ψ2> **可运算**, **这是前提**

### 图的交

- G1∩G2 = <V1∩V2，E1∩E2，Ψ1∩Ψ2 >
- 也就是节点,边,对应关系的交集

### 图的并

- G1∪G2 = <V1∪V2，E1∪E2，Ψ1∪Ψ2 >
- 也就是节点,边,对应关系的并集

### 图的环和

$$G_1 \oplus G_2 =< V_1 \cup V_2，E_1 \oplus E_2，(\Psi_1 \cup \Psi_2)_{E_1 \oplus E_2} >$$

- 节点集**取并集**
- 边集**取对称差**
- 关系根据边集变化

### 唯一性

- 三种运算均具有唯一性

## $G - E'$

- G - E'是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的G的子图
- **与 E'中的边相关联的结点并不去掉**

## $G + E'_{\Psi'}$

设图 G = <V , E , Ψ> 和 G' = <V , E', Ψ'>同为无向图或同为有向图，**若G 和 G' 边不相交，且 G'无孤立点**

- $G + E'_{\Psi'}$是由 G 增加 E' 中的边所得到的图

## 补图

设 n 阶无向图 G = < V, E , Ψ> 是 **n 阶完全无向图** $K_n$ 的生成子图，则称 $K_n – E$为$G$ 的 **补图**，记为 $\overline{G}$

# 四、路径与回路

## 路径定义

- $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{n-1} e_n v_n$为图 G 中从$v_0$至$v_n$ 的路径，n 称为该路径的长度
- 如果 $v_0 = v_n$，则称该路径为**闭的**，否则称为**开的**
- 如果各条边互不相同，则称该路径为**简单的**
- 如果各个节点互不相同，则称该路径为**基本的**
- 从路径中去掉闭路径，能够**得到基本路径**
- n 阶图中的**基本路径的长度小于 n**

$$\text{设图}G=<V,E,\Psi>\text{，}v,v'\in V\text{，如果存在从}v\text{至}v'\text{的路径}\\ \text{则存在从}v\text{至}v'\text{的基本路径} \tag{定理3.1}$$

# 其他

## 可达

若存在从 v1 至 v2 的路径，则称**在G中从v1可达v2**，或从v1到v2 可达； 否则称在G 中从 v1 不可达 v2 或从v1到v2 不可达。

对于图G的结点v， **用 R(v) 表示从v可达的全体结点的集合** 。

$$\text{设图}G=<V,E,\Psi>\text{，}v_1,v_2\in V\text{，从}v_1\text{可达}v_2\\ \text{当且仅当存在从}v_1\text{至}v_2\text{的基本路径} \tag{定理3.3}$$

## 距离与直径

- 若从 v1 可达 v2，则称从 v1 至 v2 的**路径中长度最短者**为从 v1 至 v2 的 **测地线**，并称该测地线的长度为从 v1 至 v2 的**距离**，记作 d(v1, v2)
- 若从 v1 不可达 v2，则称v1 至 v2 的距离 d(v1, v2)为 无穷$\infty$

$$\text{图}G=<V,E,\Psi>\text{ 的直径定义为}\\ \boldsymbol{max}_{v,v'\in \boldsymbol{V}}d(v,v') \tag{定义3.4}$$

## 加权图

设图 G = <V, E, Ψ > 。若存在W : E → R + （R + 是正实数集）， 则称<G，W >为**加权图**

- 若 e∈ E， 称 W(e) 为**边 e 的加权长度**
- 路径中所有边的加权长度之和称为该**路径的加权长度**
- 从结点v至结点v'的路径中, 加权长度最小的称为**从v至v'的最短路径**
- 若从v可达v'，则称从v 至v'的最短路径的加权长度为**从v至v'的加权距离**

# Dijkstra算法

- emmm......只会算，本蒟蒻总结不好，PPT上的看不懂😇

# 五、连通性

# 无向图的连通性

- 如果无向图 G 的**任意两个结点都互相可达**，则称**G是连通**的；否则称G是非连通的
- 无向图 G = <V, E, Ψ >是连通的 当且仅当对于**任意v∈V , 皆有 R(v) ＝ V**

## 连通分支

- 设G'是图G的具有某性质 P 的子图，并且对于G的具有该性质的任意子图 G"，只要G'包含于G"就有 G' = G"，则称 G'相对于该性质是 G 的 **极大子图**
- **无向图G的极大的连通子图称为G 的连通分支，简称分支**
- **连通无向图恰有一个分支**
- **非连通无向图的分支多于一个**

## 有向图的连通性

### 基础图

设有向图 G = <V, E, Ψ >， 如下定义$\Psi$'：E → { {v1, v2} | v1∈V ∧ v2∈V }，使得，对任意 e ∈E 和 v1, v2∈V，若 Ψ(e) = < v1, v2 >，则 $\Psi$'(e) = {v1, v2}。称无向图 $G'$ = <V, E, $\Psi$' >为有向图 G 的**基础图**

### 三种连通性

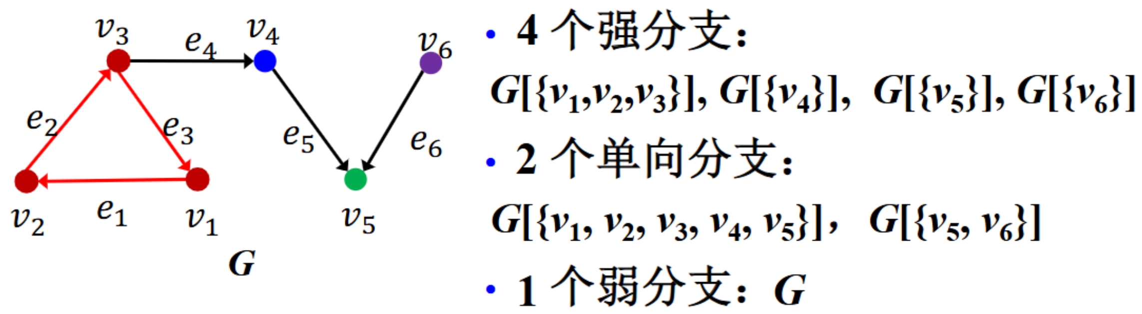
设G是有向图

- 如果G中任意两个结点都**互相可达**，则称G是**强连通**的
- 如果对于G的任意两结点，必有一个结点可达另一结点， 则称 G 是**单向连通**的
- **如果 G 的基础图是连通的**，则称 G 是**弱连通**的

### 三种分支

设G是有向图

- G 的 **极大强连通子图** 称为 G 的**强（连通）分支**
- G 的 **极大单向连通子图** 称为 G 的**单向分支**
- G 的 **极大弱连通子图** 称为 G 的**弱分支**




- 强连通（单向连通，弱连通）有向图**恰有一个**强分支（单向分支，弱分支）
- 非强连通（非单向连通，非弱连通）有向图**有一个以上**强分支（单向分支，弱分支）

# 六、回路、半回路、有向回路

## 半路径

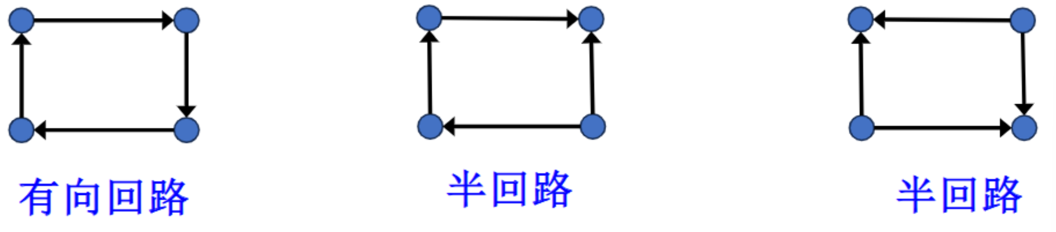
- 设 G'是有向图 G = <V, E, Ψ >的 **基础图，G'中的路径称为 G 中的半路径**
- 设 $v_0 e_1 v_1 \ldots v_{m-1} e_m v_m$是G中的半路径。对每个i (1≤i≤m)，
  - 如果Ψ$(e_i) =< v_{i-1}, v_i >$，则称 $e_i$ 是该半路径中的**正向边**
  - 如果Ψ$(e_i) =< v_i, v_{i-1} >$，则称 $e_i$ 是该半路径中的**反向边**
- 有向图中的半路径是路径 **当且仅当该半路径中的边都是正向边**

## 定义

- **连通2度正则图称为回路**

> ⓘ **Note**
>
> **回路的节点的度一定为2**

- **基础图是回路的有向图称为半回路**
- **每个结点的出度和入度均为 1 的弱连通有向图称为有向回路**
- 回路 (半回路，有向回路)边的数目称为**回路** (半回路，有向回路)**的长度**




---

**定理3.6**

设 v 是图G的任意结点，**G是回路**（或有向回路），当且仅当
(1) G的**阶与边数相等**，且
(2) 在G中存在一条 v到v的闭路径，使得**除了v在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路径中恰出现一次**

## 有回路，非循环图

### 定义

- 如果回路 (有向回路，半回路) C 是图 G的子图，则称 G **有回路** (有向回路，半回路) C
- **没有回路的无向图和没有半回路的有向图称为非循环图**

### 有向回路判断

- 如果有向图 G 有子图 G'，使得 对于 G'的任意结点 v，皆有 $d^+_{G'}(v)$或$d^-_{G'}(v) > 0$，则 G 有有向回路
- 从G中去掉 v 和与之关联的边得到有向图 G-{v}的过程称为 **W-过程**
  - **G 有有向回路当且仅当 G – {v} 有有向回路**
  - 若 n 阶有向图 G **没有有向回路**，则经过 n–1 次W-过程得到**平凡图**

### 非循环图的判断

- 图 G 不是非循环图当且仅当 G 有子图 G'，使得对**于G' 的任意结点 v，皆有** $d_{G'}(v)$**> 1**

# 七、连通性的强与弱

## 连通度

- 点连通度：为了**破坏连通性**，至少需要删除多少个顶点?
- 边连通度：为了**破坏连通性**，至少需要删除多少条边?

## 点割集

设无向图G= <V, E, Ψ >为连通图，若有非空点集V1真包含于V，

使图G删除了V1的所有结点后，所得的子图是不连通图

而删除了V1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称 **V1是G的一个点割集**

- **点割集具有极小性**
- 若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为**割点**

## 图的连通度

- 设G是无向图，k(G) = **min**{ |V1| | V1是 G 的点割集 }是**G的点连通度**，也称作连通度
- **连通度k(G)表示为了产生一个不连通图所需要删除的点的最少数目**
- **非连通图的连通度等于0，存在割点的连通图的连通度为1，n阶完全图的连通度为n-1**
- 连通度k(G)表示图G的连通程度， **k(G)大表示连通性强**，即需要删除更多的点才能使图从连通变为非连通

## 边割集

**大同小异，懒得敲了**

- 边割集
- 割边
- 边连通度

## 充要条件

- 一个连通无向图G中的结点v是割点 ⇔ 存在结点u和w，使得连接u和w的**每条路都经过v**
- 一个连通无向图G中的边e是割边 ⇔ 存在结点u和w，使得连接u和w的**每条路都经过e**

# 八、欧拉图

## 欧拉路径

- 图G中包含其**所有边的简单开路径**称为 G 的**欧拉路径**
- 图G中包含其**所有边的简单闭路径**称为 G 的**欧拉闭路**

## 定义

- **每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图**
- **每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图**

## 欧拉定理

- **设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路**
- **设 G 为弱连通的有向图。G 是欧拉有向图当且仅当 G有欧拉闭路**

## 欧拉路径判断

- 设 G ＝<V, E, Ψ> 为 **连通无向图**， v1，v2∈V 且v1 != v2 。则G 有一条从 v1 至 v2 的欧拉路径当且仅当 G **恰**
  **有两个奇结点 v1 和 v2**
- 设G为**弱连通有向图**。v1 和v2为G的两个不同结点，G有一条从 v1 至 v2 的欧拉路径 当且仅当 $\boldsymbol{d}_G^+(v_1) = \boldsymbol{d}_G^-(v_1) + 1$，$\boldsymbol{d}_G^+(v_2) = \boldsymbol{d}_G^-(v_2) - 1$,且**对其他节点，二者相等**

---

- 如果 G1 和 G2是可运算欧拉图，则G1⊕G2 是欧拉图

# 九、哈密顿图

## 定义

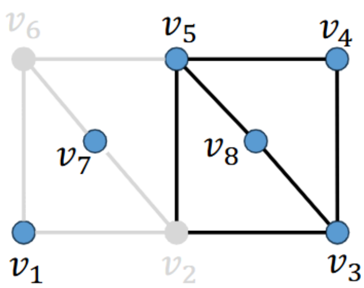
- 如果 **回路 (有向回路) C 是图 G 的生成子图** ，则称 C 为 G的**哈密顿回路**（哈密顿有向回路）
- 图G中 **包含它的所有结点的基本路径** 称为G的**哈密顿路径**
- 有**哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图称为哈密顿图**（哈密顿有向图）

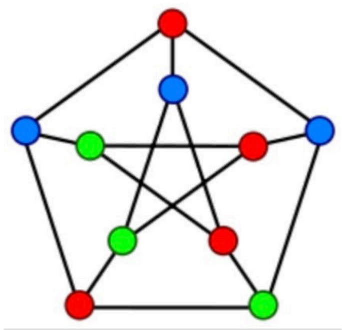
## 必要条件

**用黑白两种颜色 给图中的点着色，使相邻点的颜色不同**

- G有**哈密顿回路**，则G中白色结点与黑色结点个**数一定相等**
- G有**哈密顿路径**，则G中白色结点与黑色结点**个数相等或相差1**
- 设G=<V, E,Ψ>是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V1 有 **W(G-V1) <=|V1|**，其中W(G-V1)为G-V1的分支的个数

例：说明图$G$不是哈密顿图。



解：取$V_1$=$\{v_2, v_6\}$，则$G-V_1$有3个连通分图，得

$$W(G-V_1) > |V_1|。$$

因此，图$G$不是哈密顿图。

## 充分条件

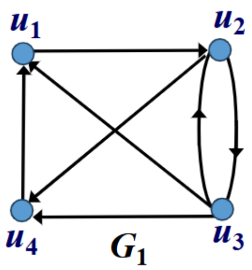
- 哈密尔顿图**一定不存在悬挂边**，至多存在哈密尔顿路径
- 哈密尔顿图中**不存在孤立顶点**
- n≥2时，$K_n$是哈密尔顿图，$K_n$表示n阶完全图
- 只要图G中有足够多边，那么图就是哈密尔顿图
- 假设G是一个n（n≥3）阶简单图，如果G中**任意顶点的度都至少是n/2**，则G是**哈密尔顿图**（狄拉克定理）
- 假设G是一个n（n≥2）阶简单图，如果G中任意一对顶点u和v，都满足$d_G(u)+d_G(v)$ **≥ n-1**,则G中存在**哈密尔顿路径**(欧尔定理)

# 十、图的矩阵表示

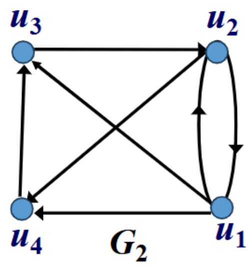
## 邻接矩阵

### 定义

**定义5.1** 设 $n$ 阶图 $G$ 的结点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，定义 $G$ 的邻接矩阵 $X(G)$ 为 $n\times n$ 矩阵 $(x_{ij})$，其中，$x_{ij}$ 为分别以 $v_i$ 和 $v_j$ 为起点和终点的边的数目。




$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ u_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$




$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$G_1$与$G_2$同构

- 如果G2和G2是两个**同构的图**，则首先交换X(G1)的一些行，然后交换相应的列，就可由X(G1)得到X(G2)

### 性质

- **无向图**G的邻接矩阵 X(G) 是**对称的**
- 图 G **没有平行边** ⇔ X(G)的**元素都是0和1**
- 图G有**自圈** ⇔ X(G)的**对角线有非零元素**
- 图G是**简单图** ⇔ X(G)的元素都是0和1,并且对角线元素都为0
- 图G是**零图** ⇔ X(G)是**零矩阵** (即所有元素都是0的矩阵)
- 若图G是**无向图**，$d_G(v_i) = x_{ii} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$
- 若图G是**有向图**，$d_G^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, d_G^-(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}, d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{n}(x_{ij} + x_{ji})$

### 幂

- 对于矩阵 X，m∈N，令 **$x_{ij}^m$ 表示 $X^m$ 的第 i 行第 j 列元素**
- n 在 X(G) 中，若 $x_{ij}$ = r，则**说明从 vi 至 vj 存在 r 条长度为 1 的路径**
- 设 m∈I+，n 阶图G的 V = {v1, v2, ..., vn}，若 X是G的邻接矩阵且1 ≤ i, j ≤ n，则 **$x_{ij}^m$ 等于 G 中从 vi 至 vj的长度为 m 的路径数目**

## 可达性矩阵

### 定义

设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2$，$\ldots, v_n$，定义图G的路径矩阵为 n×n 矩阵 P =$(p_{ij})$，其中$p_{ij}$=1,从$v_i$可达$v_j$,为0则不可达
**路径矩阵也称为可达性矩阵**

## 求解

- 设$G$为$n$阶简单图，结点集为$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - 如何判断$v_i$到$v_j$可达？
- $v_i$可达$v_j \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, 有$v_i$到$v_j$的长度为$k$的路径
  - $v_i$到$v_j$存在长度为0的路径$\Leftrightarrow i=j$
  - $v_i$到$v_j$存在长度为1的路径$\Leftrightarrow v_i$与$v_j$邻接$\Leftrightarrow x_{ij}=1$
  - $v_i$到$v_j$存在长度为2的路径$\Leftrightarrow p_{ij}^2=1$
  - $v_i$到$v_j$存在长度为3的路径$\Leftrightarrow p_{ij}^3=1$
  - $v_i$到$v_j$存在长度为$k$的路径$\Leftrightarrow p_{ij}^{(k)}=1$

$$p_{ij}^{(k)}=\vee_{l=1}^{n} p_{il}^{(k-1)} \wedge x_{lj}=p_{i1}^{(k-1)} \wedge x_{1j} \vee p_{i2}^{(k-1)} \wedge x_{2j} \vee \cdots \vee p_{in}^{(k-1)} \wedge x_{nj}$$

$v_i$可达$v_j \Leftrightarrow$

$$(i=j) \vee (x_{ij}=1) \vee (p_{ij}^{(2)}=1) \vee (p_{ij}^{(3)}=1) \vee \ldots \vee (p_{ij}^{(n-1)}=1)$$



## 由邻接矩阵求路径矩阵

**定理 5.2** 设$X$和$P$分别是$n$阶简单图$G$的邻接矩阵和路径矩阵，记 $X^{(0)}=I_n$（$I_n$是$n$阶单位矩阵)。

$$X^{(k+1)}=X^{(k)} \otimes X \ (k=0, 1, 2, \ldots, n),$$

则$P=\sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}$。

（$X^{(1)}=X$, $X^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$）

- $p_{ij}^{(k+1)}=\vee_{l=1}^{n}(p_{il}^{(k)} \wedge x_{lj})$
- $p_{ij} \Leftrightarrow (i=j) \vee x_{ij} \vee p_{ij}^{(2)} \vee p_{ij}^{(3)} \vee \ldots \vee p_{ij}^{(n-1)}$

- 其实也就是求出G的各阶矩阵，再或一下

# 距离矩阵

## 定义

- 设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2$， $\ldots, v_n$ ,称n×n 矩阵 D ＝$(d_{ij})$为G的**距离矩阵**，其中$d_{ij}$表示vi到vj的距离
- 如果vi到vj不连通，则为∞

# 关联矩阵

## 定义

- 设**无自圈的无向图** G 的结点集和边集分别为$v_1, v_2, \ldots, v_n$ 和$e_1, e_2, \ldots, e_m$， 定义 G 的关联矩阵 A(G)为 n×m 矩阵$(a_{ij})$， **其中$a_{ij}$=1,if $e_j$和$v_i$关联，若不关联则为0**
- **无自圈的有向图**， **其中$a_{ij}$=1,if $v_i$是$e_j$起点，其中$a_{ij}$= -1,if $v_i$是$e_j$终点，不关联则为0**

## 联系

- G是**零图** ⇔ A(G) 是空矩阵 (即没有任何元素的矩阵
- **无向图** G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 2(每条边过2个结点)
- **有向图** G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 0
- ei 和 ej 是 G 的**平行边** ⇔ A(G)的第 i 列与第 j 列相同
- 若G是无向图，则 $d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ ( i = 1， 2， ...， n )
- 若G是有向图，（ i = 1, 2, ..., n ):
  - $d_G^+(v_i)$为 A(G) 的第 i 行中**值为 1** 的元素个数
  - $d_G^-(v_i)$为 A(G) 的第 i 行中**值为 −1** 的元素个数
  - $d_G(v_i)$为 A(G) 的第 i 行中 **非零** 元素个数

# 总结

- **图的路径矩阵和距离矩阵不能给出图的全部信息**
- **图的邻接矩阵可以给出图的全部信息**
- **无自圈图的关联矩阵可以给出无自圈图的全部信息**